TD n°10: Théorèmes d'approximation et de factorisation.

Analyse complexe 2024-2025, Thomas Serafini
tserafini@dma.ens.fr

Exercices à faire en priorité : 1-2-3-5-4. Les exercices marqués d'un [1] sont des exercices plus difficiles, plus longs, ou plus loin du cours.

Théorèmes de Runge, Weierstrass et Mittag-Leffler.

Exercice 1. Manipulation du théorème de Runge.

1. Soit $K \subsetneq \partial\mathbb{D}$ un compact, $\varepsilon > 0$. Démontrer à l'aide du théorème de Runge qu'il existe un polynôme $P(z)$ vérifiant $P(0) = 1$ et $\sup_{z\in K} |P(z)| < \varepsilon$.

2. Démontrer à l'aide du théorème de Runge qu'il existe une suite $(P_n)_n$ de polynômes vérifiant, pour tout $z \in \mathbb{C}$
$$\lim_{n\to\infty} P_n(z) = \begin{cases} 1, & \Re(z) > 0 \\ -1, & \Re(z) < 0. \end{cases}$$

Exercice 2. Fonctions holomorphes à valeurs de dérivées prescrites.
Démontrer à l'aide du théorème de Weierstrass et de Mittag-Leffler le fait suivant : étant donné un ouvert $U \subseteq \mathbb{C}$, une suite $(z_n)_n$ sans point d'accumulation dans U, une suite $(k_n)_n$ d'entiers strictement positifs, et une collection $(a_{n,k})_{k<k_n}$ de nombres complexes, il existe une fonction holomorphe sur U dont la k-ème dérivée en z_n avec $k < k_n$ est $a_{n,k}$.

Exercice 3. Quotients de fonctions holomorphes.
Soit f une fonction méromorphe sur un ouvert U de $\mathbb{C}$. Démontrer que f est un quotient de fonction holomorphes.

Exercice 4. $\mathcal{O}(U)$ est un anneau de Bézout
On fixe un ouvert connexe $U \subseteq \mathbb{C}$. On appelle idéal de $\mathcal{O}(U)$ tout sous $\mathbb{C}$-espace vectoriel de $\mathcal{O}(U)$ qui vérifie que pour tout $g \in I, f \in \mathcal{O}(U)$, $fg \in I$.
Pour $f \in \mathcal{O}(U)$, $a \in U$, on note $v_a(f)$ l'ordre d'annulation de f en a, $\mathrm{div}(f) = (v_a(f))_{a\in U}$ et pour $I \subseteq \mathcal{O}(U)$, $\mathrm{div}(I) = (\min_{f\in I} v_a(f))_{a\in U}$. Pour $\boldsymbol{m} = (m_a)_{a\in U}$, $\boldsymbol{n} = (n_a)_{a\in U}$, on écrira $\boldsymbol{m} \geqslant \boldsymbol{n}$ si $m_a \geqslant n_a$ pour tout a.

1. (a) Démontrer que pour $a \in U$, $\mathfrak{m}_a := \{f \in \mathcal{O}(U) : f(a) = 0\}$ est un idéal.
   (b) Plus généralement, si $\boldsymbol{n} = (n_a)_{a\in U}$, démontrer que
   $$I(\boldsymbol{n}) := \{f \in \mathcal{O}(U) : \mathrm{div}(f) \geqslant \boldsymbol{n}\}$$
   est un idéal de $\mathcal{O}(U)$ et vérifier que $\mathfrak{m}_a = I(\mathbf{1}_a)$ où $\mathbf{1}_a$ est la famille d'entiers qui vaut 1 en a et 0 partout ailleurs. Démontrer que si $n_a = 0$ sauf pour a dans un ensemble discret, alors $\mathrm{div}(I(\boldsymbol{n})) = \boldsymbol{n}$.
   (c) Soit f in $\mathcal{O}(U)$. Démontrer que $(f) = \{fg : g \in \mathcal{O}(U)\}$ est un idéal, qui vérifie $\mathrm{div}((f)) = \mathrm{div}(f)$. Plus généralement, si $f_1, ..., f_m \in \mathcal{O}(U)$, démontrer que
   $$(f_1, ..., f_m) := \{g_1 f_1 + ... + g_m f_m : g_1, ..., g_m \in \mathcal{O}(U)\}$$
   est un idéal vérifiant $\mathrm{div}((f_1, ..., f_m)) \geqslant (\min_j v_a(f_j))_{a\in U}$.

2. Vérifier que $\mathrm{div}(f) \geqslant \mathrm{div}(g)$ si et seulement si g divise f, c'est-à-dire s'il existe $h \in \mathcal{O}(U)$ telle que $f = gh$.

3. Soient $f, g \in \mathcal{O}(U)$ sans zéro commun. Démontrer à l'aide de l'exercice 2 qu'il existe $v \in \mathcal{O}(U)$ telle que $\mathrm{div}(1 - vg) \geqslant \mathrm{div}(f)$.

4. En déduire que pour $f, g \in \mathcal{O}(U)$, il existe $u, v \in \mathcal{O}(U)$ et $h \in \mathcal{O}(U)$ vérifiant $v_a(h) = \min(v_a(f), v_a(g))$ pour tout a, telles que $uf + vg = h$

[1] Merci à Hadrien pour ce raton-laveur en Tikz !

5. Soit $I \subseteq \mathcal{O}(U)$ un idéal finiment généré, c'est-à-dire de la forme $(f_1, ..., f_m)$. Démontrer que I est de la forme (f).

6. Exhiber un idéal qui n'est pas de la forme $(f_1, ..., f_m)$.

Le théorème de factorisation de Hadamard.

Cette partie du TD se présente comme quatre exercices qui, mis bout à bout, permettent de prouver le théorème de factorisation de Hadamard :

Théorème (Factorisation de Hadamard)**.** *Soit f une fonction entière d'ordre $\rho > 0$ (voir l'exercice 7 pour la définition), et $p = \lfloor \rho \rfloor$. Il existe un unique polynôme $Q(z)$, de degré p, et un entier $m \geqslant 0$ tels que*

$$f(z) = z^m e^{Q(z)} \prod_{n \geqslant 1} E_p\left(\frac{z}{a_n}\right).$$

Exercice 5. Théorème de factorisation de Weierstrass.
Pour $p \geqslant 0$ entier, on définit

$$E_p(z) = \begin{cases} 1 - z, & p = 0 \\ (1-z)\exp\left(z + \frac{z^2}{2} + ... + \frac{z^p}{p}\right), & p > 0. \end{cases}$$

1. Démontrer que $E_p'(z) = -z^p \exp\left(z + \frac{z^2}{2} + ... + \frac{z^p}{p}\right)$ et que pour $t \in [0,1], |z| = 1$, on a $|E_p'(zt)| \leqslant -E_p'(t)$.

2. En déduire que $\sup_{|z|=1} |E_p(z) - 1| = 1$, puis que pour $|z| \leqslant 1$ on a

$$|E_p(z) - 1| \leqslant |z|^{p+1}.$$

3. Soit $(a_n)_n$ une suite de nombres complexes non-nuls vérifiant $|a_n| \to \infty$ et $(p_n)_n$ est une suite d'entiers telle que

$$\sum_{n \geqslant 1} \left(\frac{r}{|a_n|}\right)^{1+p_n} < \infty.$$

   (a) Démontrer que pour tout R, il existe n_R entier tel que pour $n \geqslant n_R$, une détermination de $\log(E_{p_n}(z/a_n))$ existe sur $|z| \leqslant R$ et vérifie

$$\left|\log\left(E_{p_n}(z/a_n)\right)\right| \leqslant 2\left|\frac{z}{a_n}\right|^{p_n+1}$$

   pour tout $|z| \leqslant R$.

   (b) En déduire que $\prod_{n \geqslant n_R} E_{p_n}(z/a_n)$ converge uniformément sur $|z| \leqslant R$, et en déduire finalement que $\prod_{n \geqslant 1} E_{p_n}(z/a_n)$ converge uniformément sur tout compact de $\mathbb{C}$.

   (c) Démontrer que les zéros de $\prod_{n \geqslant 1} E_{p_n}(z/a_n)$ sont exactement les a_n (avec multiplicité).

4. Démontrer que si f est une fonction entière de zéros non-nuls $(a_n)_n$, comptés avec multiplicités, alors il existe un entier $m \geqslant 0$ et pour toute suite $(p_n)_n$ d'entiers vérifiant $\sum_{n \geqslant 1} \left(\frac{r}{|a_n|}\right)^{1+p_n} < \infty$, il existe une fonction entière g tels que

$$f(z) = z^m e^{g(z)} \prod_{n \geqslant 1} E_{p_n}\left(\frac{z}{a_n}\right).$$

Exercice 6. Formule de Jensen.
Soit f une fonction holomorphe au voisinage de $\overline{\mathbb{D}}(0,R)$, telle que $f(z) \neq 0$ pour $|z| = R$ et $f(0) \neq 0$. On note $a_1, ..., a_N$ les zéros de f avec multiplicités. Démontrer l'égalité

$$\log|f(0)| = \sum_{n=1}^{N} \log|a_n/R| + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|f(Re^{i\theta})| d\theta.$$

On pourra considérer la fonction $g(z) = \frac{f(z)}{\prod_{n=1}^{N}(z-a_n)}$ et appliquer le théorème de Cauchy à une fonction holomorphe bien choisie.

Exercice 7. Zéros d'une fonction entière d'ordre fini.
Soit f une fonction entière. On définit l'ordre ρ de f comme

$$\rho = \inf\left\{\alpha > 0 : |f(z)| \leqslant Ae^{B|z|^\alpha},\ A, B \text{ constantes } > 0, |z| \text{ assez grand}\right\}.$$

On note $(a_n)_n$ les zéros de f, par ordre croissant de module et avec multiplicités.

1. Calculer les ordres de $z \mapsto P(z)e^{Q(z)}$ avec P, Q polynômes, et $z \mapsto \cos(\sqrt{z})$.
   Pour f fonction entière, on note $N_f(R)$ le nombre (avec multiplicités) de zéros de f de module $\leqslant R$.
2. (a) Démontrer que si $R > 0$ et $a_1, ..., a_N$ sont les racines de f de module $< 2R$, on a

$$\sum_{n=1}^{N} \log \frac{2R}{|a_n|} \geqslant \log(2) N_f(R).$$

   (b) En déduire que pour $\alpha > \rho$, il existe une constante $C > 0 \in \mathbb{R}$ telles que pour R assez grand, on a

$$N_f(R) \leqslant CR^\alpha.$$

3. Démontrer que pour $\beta > \rho$, la somme

$$\sum_{n \geqslant 1} |a_n|^{-\beta}$$

   converge.

Exercice 8. Théorème de factorisation de Hadamard
Soit f une fonction entière d'ordre $\rho > 0$. On pose, pour tout cet exercice, $p = \lfloor \rho \rfloor$, et les (a_n) sont la suite des zéros de f avec multiplicité, rangés par ordre croissant de module.

1. Démontrer à l'aide des exercices 7 et 5 qu'il existe un entier $m \geqslant 0$ et une fonction entière g telle que :

$$f(z) = z^m e^{g(z)} \prod_{n \geqslant 1} E_p\left(\frac{z}{a_n}\right).$$

2. Pour prouver le théorème de Hadamard, il suffit de prouver que g est un polynôme. Pour ce faire, on veut minorer le produit des $E_p(z/a_n)$ - on commence par traiter les facteurs pour lesquels a_n est grand devant z.
   (a) Démontrer que pour $|z| \leqslant \frac{1}{2}$, on a

$$E_p(z) = \exp\left(-\sum_{n \geqslant p+1} \frac{z^n}{n}\right).$$

   (b) Démontrer que pour $|z| \leqslant \frac{1}{2}$ et $\rho < \alpha < p + 1$, on a

$$|E_p(z)| \geqslant e^{-2^{\alpha-p-1}c|z|^\alpha}.$$

   (c) En déduire que pour tout $p + 1 > \alpha > \rho$, il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\left|\prod_{n:|2z| \leqslant |a_n|} E_p\left(\frac{z}{a_n}\right)\right| \geqslant e^{-C|z|^\alpha}$$

3. On s'occupe à présent des facteurs pour lesquels a_n est petit devant z, lesquels sont en nombre fini.
   (a) Démontrer que si $|z| > \frac{1}{2}$, alors pour tout $\alpha > \rho$ il existe une constante $C > 0$ telle que :

$$|E_p(z)| \geqslant |1 - z|e^{-C|z|^\alpha}$$

(b) Démontrer que si $z \notin \bigcup_{n\geqslant 1} \mathbb{D}(a_n, |a_n|^{-p-2})$, alors

$$\prod_{n:|2z|>|a_n|} \left|1 - \frac{z}{a_n}\right| \geqslant (2|z|)^{-(p+3)N_f(2|z|)}.$$

(c) En déduire que pour $\alpha > \rho$, pour $\big||z| - |a_n|\big| > |a_n|^{-p-2}$ (pour tout n) et $|z|$ assez grand, on a

$$\left|\prod_{n\geqslant 1} E_p\left(\frac{z}{a_n}\right)\right| \geqslant e^{-C|z|^\alpha}.$$

4. Démontrer que pour $\alpha > \rho$, il existe une constante $C > 0$ telle que pour $|z|$ assez grand et $\big||z| - |a_n|\big| > |a_n|^{-p-2}$ (pour tout n):

$$|e^{g(z)}| \leqslant e^{C|z|^\alpha}.$$

5. (a) Soit h une fonction entière, u sa partie réelle, $R > 0$ un réel. Démontrer que pour $n \geqslant 1$, on a

$$-\frac{h^{(n)}(0)}{n!} = \frac{1}{\pi R^n} \int_0^{2\pi} \left(CR^\alpha - u(Re^{i\theta})\right) e^{-in\theta} d\theta.$$

(b) En déduire que si $u(Re^{i\theta}) \leqslant CR^\alpha$, alors

$$|h^{(n)}(0)| \leqslant 2Cn!R^{s-n} - 2n!u(0)R^{-n}.$$

6. Démontrer le théorème de factorisation de Hadamard.